

2022

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-1

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১নং প্রশ্ন এবং প্রতিটি ইউনিট থেকে কমপক্ষে একটি করে প্রশ্ন নিয়ে আরো নয়টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির মধ্যে সঠিক উত্তরটি যথাযথ যুক্তিসহ নির্বাচন করো :

২×১০

(ক) i^i -এর মুখ্য মানটি হল

(অ) $e^{-(4n+1)\frac{\pi}{2}}$, n একটি পূর্ণসংখ্যা

(আ) $e^{-\pi}$

(ই) e^{π}

(ঈ) $e^{-\pi/2}$

(খ) যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণটির তিনটি বীজ α , $-\alpha$ এবং β হয়, তাহলে α^2 -এর মান হবে

(অ) $\frac{r}{p}$

(আ) $-\frac{r}{p}$

(ই) $\frac{p}{r}$

(ঈ) $-\frac{p}{r}$

(গ) যদি নীচের সমসত্ত্ব সমীকরণগুলির সিস্টেমের একটি অশূন্য (nontrivial) সমাধান থাকে :

$$x + \lambda y + 2z = 0, \quad 3x + 2\lambda y + z = 0, \quad 2x + 3y - 4z = 0,$$

তাহলে λ -এর মান হবে

(অ) 0

(আ) 15

(ই) $\frac{15}{2}$

(ঈ) $-\frac{15}{2}$

(ঘ) নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির মধ্যে কোন্টি $x = 0$ -তে সন্তত (continuous)?

(অ) $f(x) = \frac{1}{x}$

(আ) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(ই) $f(x) = |x|$

(ঈ) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

Please Turn Over

(ঙ) $f(x) = \log_e \frac{1-x}{1+x}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞায়িত হওয়ার অঞ্চল হল

(অ) $(-1, 1)$

(আ) $[-1, 1]$

(ই) $(0, 1)$

(ঈ) $[0, 1]$

(চ) যদি $2x = 9$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তটির সাপেক্ষে $(2, 0)$ বিন্দুটির Polar হয়, তবে a -এর মান হল

(অ) 1

(আ) 2

(ই) 3

(ঈ) 4

(ছ) সমীকরণ $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ প্রতিনিধিত্ব করে দুটি

(অ) সমান্তরাল সরলরেখা

(আ) coincident সরলরেখা

(ই) লম্ব সরলরেখা

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(জ) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ এই গোলকটির $(6, -3, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শক তলটির সমীকরণ হল

(অ) $x - 3y - 2z = 49$

(আ) $6x - 3y + 2z = 49$

(ই) $6x - 3y - 2z = 49$

(ঈ) $x + 4y + 3z = 49$

(ঝ) $y = e^{-x} (A \cos x + B \sin x)$, A, B ধ্রুবক এই বক্রগুলির অবকল সমীকরণটি হল

(অ) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(আ) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

(ই) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(ঈ) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

(ঞ) যদি $u(x, y) = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$, $x \neq y$; তাহলে $x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x}$ -এর মান হবে

(অ) $\sin u$

(আ) $\cos u$

(ই) $\sin 2u$

(ঈ) $\cos 2u$

ইউনিট - ১

(Algebra - I)

২। (ক) যদি n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cos \frac{n\pi}{4}$ ।

(খ) $\log \sin(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$, যেখানে $\theta, \phi, \alpha, \beta$ সবাই বাস্তব, প্রমাণ করো যে, $2\cos 2\theta = e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 4e^{2\alpha}$ ।

৩। ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে সমাধান করো :

$$x + y + z = 8$$

$$x - y + 2z = 6$$

$$3x + 5y - 7z = 14$$

৪। যদি $x^3 - 2x^2 + 4x - 5 = 0$ সমীকরণটির তিনটি বীজ α, β, γ হয়, তবে সেই সমীকরণটি নির্ণয় করো যার বীজ তিনটি হল

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}।$$

ইউনিট - ২

(Differential Calculus - I)

৫। (ক) $f(x)$ অপেক্ষকটি $[0, 2]$ interval-এ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad 0 \leq x < 1$$

$$= 2x + 1, \quad 1 \leq x \leq 2$$

$f; x = 1$ -তে সন্তত (continuous) কি না পরীক্ষা করো।

(খ) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ -এর অস্তিত্ব আছে কি না পরীক্ষা করো।

২+৩

৬। দুটি অপেক্ষকের গুণফলের n th derivative সংক্রান্ত লিবনিজ উপপাদ্যটি বিবৃত করো। এর সাহায্যে প্রমাণ করো যে, যদি

$$y = e^{\tan^{-1} x} \text{ হয়, তবে } (1+x^2)y_{n+2} + (2nx+x-1)y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0।$$

১+৪

৭। (ক) দুই চলবিশিষ্ট Homogeneous অপেক্ষকের উপর Euler-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

(খ) যদি $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (x^2 + y^2 + z^2) \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0।$

১+৪

৮। প্রমাণ করো যে $y = c \cosh \frac{x}{c}$ -এই বক্রের উপর কোনো বিন্দুতে radius of curvature, ordinate-এর বর্গের সাথে সরল ভেদে আছে।

৫

৯। $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখাসমূহের এনভেলাপ নির্ণয় করো, যেখানে $a + b = c$ (c একটি ধ্রুবক, a, b পরিবর্তনশীল ধ্রুবক)।

৫

ইউনিট - ৩

(Differential Equation - I)

১০। (ক) $(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$ অবকল সমীকরণটি Exact কি না পরীক্ষা করো।

(খ) সমাধান করো : $x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$ ।

২+৩

১১। $y = px + \sqrt{1 + p^2}$ -এর সাধারণ এবং একক (singular) সমাধান নির্ণয় করো।

৫

১২। সমাধান করো : $\frac{d^2 y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 24e^{-3x}$ ।

৫

ইউনিট - ৪

(Coordinate Geometry)

১৩। $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে কণিকটির প্রকৃতি (nature) নির্ণয় করো।

৫

১৪। $r \cos(\theta - \alpha) = p$ সরলরেখাটি যদি $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ কণিকটিকে স্পর্শ করে তবে দেখাও যে,

$$(l \cos \alpha + ep)^2 + l^2 \sin^2 \alpha = p^2$$

৫

১৫। যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত দুটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে তবে দেখাও যে, $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$ ।

৫

১৬। একটি লম্ব বৃত্তীয় কোণের সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত, যার অক্ষ z-অক্ষ, এবং (3, -4, 6) বিন্দুগামী।

৫

১৭। $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 5 = 0$ গোলকটির দুটি স্পর্শক তল (tangent plane)-এর সমীকরণ নির্ণয় করো যারা $2x + 2y - z = 0$ এই তলটির সাথে সমান্তরাল।

৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Answer **question no. 1** and **any nine** questions from the rest,
taking at least **one** question from **each unit**.

1. Choose the correct option from each of the following questions with proper justification : 2×10

(a) The principal value of i^i will be

(i) $e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}}$, n being an integer (ii) $e^{-\pi}$

(iii) e^{π} (iv) $e^{-\pi/2}$.

(b) If α , $-\alpha$ and β be the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then the value of α^2 will be

(i) $\frac{r}{p}$ (ii) $-\frac{r}{p}$

(iii) $\frac{p}{r}$ (iv) $-\frac{p}{r}$.

(c) If the system of homogeneous equations possesses a non-trivial solution :

$$x + \lambda y + 2z = 0, \quad 3x + 2\lambda y + z = 0, \quad 2x + 3y - 4z = 0,$$

then the value of λ will be

(i) 0 (ii) 15

(iii) $\frac{15}{2}$ (iv) $-\frac{15}{2}$.

(d) Which of the following function is continuous at $x = 0$?

(i) $f(x) = \frac{1}{x}$ (ii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(iii) $f(x) = |x|$ (iv) $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

(e) The domain of definition of the function $f(x) = \log_e \frac{1-x}{1+x}$ is

(i) $(-1, 1)$ (ii) $[-1, 1]$

(iii) $(0, 1)$ (iv) $[0, 1]$.

(f) If $2x = 9$ is the equation of polar of the point $(2, 0)$ with respect to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$, then the value of a is,

(i) 1 (ii) 2

(iii) 3 (iv) 4.

Please Turn Over

- (g) $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ represents a pair of
- (i) parallel straight lines (ii) coincident straight lines
- (iii) perpendicular straight lines (iv) none of these.
- (h) Equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ at the point $(6, -3, -2)$ is
- (i) $x - 3y - 2z = 49$ (ii) $6x - 3y + 2z = 49$
- (iii) $6x - 3y - 2z = 49$ (iv) $x + 4y + 3z = 49$.
- (i) The differential equation of family of curves $y = e^{-x} (A \cos x + B \sin x)$, where A, B are arbitrary constants is
- (i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$
- (iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$.
- (j) If $u(x, y) = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$, $x \neq y$; then the value of $x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x}$ is
- (i) $\sin u$ (ii) $\cos u$
- (iii) $\sin 2u$ (iv) $\cos 2u$.

Unit - 1

(Algebra - I)

2. (a) If n be a positive integer, prove that $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cos \frac{n\pi}{4}$.
- (b) If $\log \sin(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$, where $\theta, \phi, \alpha, \beta$ are reals, prove that $2\cos 2\theta = e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 4e^{2\alpha}$. 2+3
3. Solve by matrix method : 5
- $$\begin{aligned} x + y + z &= 8 \\ x - y + 2z &= 6 \\ 3x + 5y - 7z &= 14 \end{aligned}$$
4. If α, β, γ are roots of the equation $x^3 - 2x^2 + 4x - 5 = 0$, then find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \frac{\beta}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$. 5

Unit - 2

(Differential Calculus - I)

5. (a) A function $f(x)$ is defined on $[0, 2]$ by

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad 0 \leq x < 1$$

$$= 2x + 1, \quad 1 \leq x \leq 2$$

Examine if f is continuous at $x = 1$.

- (b) Does the $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ exists? Examine. 2+3

6. State Leibnitz's theorem for the n th derivative of the product of two functions. Use it to prove that if $y = e^{\tan^{-1} x}$, then $(1+x^2)y_{n+2} + (2nx+x-1)y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$. 1+4

7. (a) State Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

- (b) If $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $(x^2 + y^2 + z^2) \neq 0$, then show that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. 1+4

8. Prove that the radius of curvature at any point of the curve $y = c \cosh \frac{x}{c}$ varies as the square of the ordinate. 5

9. Find the envelope of the lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, where $a + b = c$ (c is constant and a, b are parameters). 5

Unit - 3

(Differential Equation - I)

10. (a) Test whether $(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$ is an exact differential equation.

- (b) Solve : $x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$. 2+3

11. Find the general and singular solution of $y = px + \sqrt{1+p^2}$. 5

12. Solve : $\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 9y = 24e^{-3x}$. 5

Please Turn Over

Unit - 4

(Coordinate Geometry)

13. Reduce the equation $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic. 5
14. If the straight line $r \cos(\theta - \alpha) = p$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$, then show that $(l \cos \alpha + ep)^2 + l^2 \sin^2 \alpha = p^2$. 5
15. If $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents two straight lines equidistant from the origin, then show that $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$. 5
16. Find the equation of the right circular cone whose vertex is at the origin, axis is the z -axis and which passes through the point $(3, -4, 6)$. 5
17. Find the equations of the two tangent planes to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 5 = 0$ which are parallel to the plane $2x + 2y - z = 0$. 5
-