2023

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-2

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

(Throughout the question paper, notations/symbols carry their usual meanings)

বিভাগ - ক

(মান - ১০)

১। সঠিক বিকল্পটি বেছে লেখো ঃ ১×১০

(ক) $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ অনুক্রমটি হল

(অ) ক্রমবৃদ্ধিমান (আ) দোদুল্যমান

(ই) অপসারী (ঈ) ক্রমহ্রাসমান।

(খ) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ শ্রেণিটি

(অ) অভিসারী (আ) অপসারী

(ই) দোদুল্যমান (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(গ) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$; অবকল সমীকরণটির সমাধান হবে

(অ) $Ae^{-x} + Be^{2x}$ (আ) $Ae^{x} + Be^{-2x}$

(ই) $Ae^{x} + Be^{2x}$ (ঈ) $Ae^{-x} + Be^{-2x}$

(ঘ) নীচের কোন অপেক্ষকটি $[-2, 2]$ অন্তরে Rolle's উপপাদ্য-কে পূরণ করে না?

(অ) $\frac{1}{x}$ (আ) $\frac{1}{x-1}$

(ই) x (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঙ) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = ?$

(অ) 0 (আ) 1

(ই) -1 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(চ) যদি $f(x) = (x-1)^3$, $x \in \mathbb{R}$ হয়, তাহলে,

(অ) $x = 1$-এ f-এর চরম মান আছে

(আ) $x = 1$-এ f-এর অবম মান আছে

(ই) $x = 1$-এ f-এর চরম বা অবম কোনো মান নেই

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ছ) যদি তিনটি ভেক্টর $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$, $\hat{i} - 4\hat{k}$ এবং $4\hat{i} + 3\hat{j} + \alpha\hat{k}$ সমতলীয় (coplanar) হয়, তবে 'α'-র মান হবে

(অ) -1 (আ) 1

(ই) -2 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(জ) $x'y\,z' + x'y'z$ বুলীয় রাশিটির দ্বৈত (dual) হবে

(অ) $(x'y\,z')(x'y'\,z)$ (আ) $(x + y' + z)(x' + y' + z)$

(ই) $(x' + y + z')(x' + y' + z)$ (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঝ) $z = ax + (1-a)\,y + b$ অপেক্ষকটি থেকে $a\,(\neq 0)$ এবং $b\,(\neq 0)$ অপসারণ করলে যে আংশিক অবকল সমীকরণ পাওয়া যাবে সেটি হল

(অ) $\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (আ) $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

(ই) $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 1$ (ঈ) $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 2$

(ঞ) যে-কোনো পূর্ণসংখ্যা a-এর জন্য, g.c.d. $(2a + 1, 9a + 4) = ?$

(অ) 1 (আ) 2

(ই) 3 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

বিভাগ - খ

[Differential Calculus - II]

ইউনিট - ১

(মান - ১৫)

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

২। দেখাও যে $\{x_n\}$ অনুক্রমটি যথার্থ ক্রমবৃদ্ধিমান যখন $x_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$ এবং এখান থেকে প্রমাণ করো এটি অভিসারী। ৩+২

৩। (ক) একটি শ্রেণিতে Comparison Test-এর লিমিট ফর্মটি বিবৃত করো।

(খ) দেখাও যে, $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$ শ্রেণিটি একটি অভিসারী শ্রেণি হবে, যেখানে $x > 0$। ২+৩

৪। (ক) Mean Value Theorem প্রয়োগ করে দেখাও যে $0 < \frac{1}{x}\log\frac{e^x-1}{x} < 1$।

(খ) $\underset{x\to 1}{Lt}\left\{\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right\}$-এর মান নির্ণয় করো। ৩+২

৫। প্রসারণের বৈধতা (Validity of expansion)-কে ধরে নিয়ে $\log_e(1 + x)$-কে অসীম শ্রেণির x-এর power-এ প্রসারিত (expand) করো। ৫

৬। $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$ অপেক্ষকটির সর্বোচ্চ (চরম ও অবম) মানগুলি (যদি থাকে) নির্ণয় করো। ৫

বিভাগ - গ

[Differential Equation - II]

ইউনিট - ২

(মান - ৫)

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৭। সমাধান করো ঃ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y = x\log x$। ৫

৮। Charpit's method দিয়ে আংশিক অবকল সমীকরণ (Partial Differential Equation) সমাধান করো ঃ

$$z^2\left\{z^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}=1\text{ ।}$$ ৫

বিভাগ - ঘ

[Vector Algebra]

ইউনিট - ৩

(মান - ৫)

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৯। ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করো, যদি চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে। ৫

১০। (ক) প্রমাণ করো ঃ $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0}$ ।

(খ) কোন শর্তে $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ হবে, তা নির্ণয় করো। ৩+২

বিভাগ - ঙ

[Discrete Mathematics]

ইউনিট - ৪

(মান - ৩০)

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১১। (ক) Mathematical Induction-এর সাহায্যে প্রমাণ করো যে, $\left(10^{2n-1}+1\right)$ বিভাজ্য (divisible) 11 দ্বারা, $\forall n\in\mathbb{N}$।

(খ) $5x+7y=100$-এর ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সমাধান নির্ণয় করো। ৫+৫

১২। (ক) যদি g.c.d.$(a,b)=k$ হয়, তাহলে প্রমাণ করো g.c.d.$\left(a^2,b^2\right)=k^2$ ।

(খ) ISBN সংখ্যা 81-213-0871-9-এর কার্যকারিতা (validity) পরীক্ষা করো। ৫+৫

১৩। (ক) নিম্নলিখিত সিস্টেম অফ্ কনগ্রুয়েন্স (System of congruence)-টির সমাধান করো ঃ

$x \equiv 3 \pmod 5$

$x \equiv 4 \pmod 7$

$x \equiv 6 \pmod 9$

(খ) 3^{909}-এর একক স্থানীয় (unit digit) সংখ্যাটি নির্ণয় করো। ৫+৫

১৪। (ক) Fermat উপপাদ্যের সাহায্যে অবশেষ নির্ণয় করো, যখন 10^{515}-কে 7 দ্বারা ভাগ করা হয়।

(খ) যদি p এবং $p^2 + 8$ উভয়েই মৌলিক সংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে $p = 3$। ৫+৫

১৫। (ক) $f = (x+y+z)(xy+x'z)'$ বুলীয় অপেক্ষকটিকে x, y, z চলরাশির জন্য C.N.F.-এ রূপান্তরিত করো।

(খ) NAND লজিক গেট-এর সংজ্ঞা লেখো। কেবলমাত্র NAND লজিক গেট-এর সাহায্যে $f(x, y, z) = x + yz$ বুলীয় অপেক্ষকটি অঙ্কন করো। ৫+(১+৪)

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

(Marks : 10)

1. Choose the correct alternatives : 1×10

(a) The sequence $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ is

(i) monotonic increasing (ii) oscillatory

(iii) divergent (iv) monotonic decreasing.

(b) The series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ is

(i) convergent (ii) divergent

(iii) oscillatory (iv) None of these.

(c) The general solution of the ordinary differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ is

(i) $Ae^{-x} + Be^{2x}$ (ii) $Ae^{x} + Be^{-2x}$

(iii) $Ae^{x} + Be^{2x}$ (iv) $Ae^{-x} + Be^{-2x}$.

(d) Which of the following function does not satisfy Rolle's theorem in $[-2, 2]$ interval?

(i) $\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{1}{x-1}$

(iii) x (iv) None of these.

(e) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = ?$

(i) 0 (ii) 1

(iii) -1 (iv) None of these.

(f) The function f is defined by $f(x) = (x - 1)^3$, $x \in \mathbb{R}$, then

(i) f has maximum at $x = 1$

(ii) f has minimum at $x = 1$

(iii) f has neither maximum nor minimum at $x = 1$

(iv) None of the above.

(g) If the three vectors $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$, $\hat{i} - 4\hat{k}$ and $4\hat{i} + 3\hat{j} + \alpha\hat{k}$ are coplanar, then the value of 'α' will be

(i) -1 (ii) 1

(iii) -2 (iv) None of these.

(h) The dual of the Boolean expression $x'y\,z' + x'y'z$ is

(i) $(x'y\,z')(x'y'\,z)$ (ii) $(x + y' + z)(x' + y' + z)$

(iii) $(x' + y + z')(x' + y' + z)$ (iv) None of these.

(i) The partial differential equation formed by eliminating the arbitrary constants $a\ (\neq 0)$ and $b\ (\neq 0)$ from the relation $z = ax + (1 - a)\,y + b$ is

(i) $\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (ii) $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

(iii) $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 1$ (iv) $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 2$.

(j) For any integer a, g.c.d. $(2a + 1, 9a + 4) = ?$

(i) 1 (ii) 2

(iii) 3 (iv) None of these.

Group - B

[Differential Calculus - II]

Unit - 1

(Marks : 15)

Answer ***any three*** questions.

2. If $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$; $n \in \mathbb{N}$, then show that $\{x_n\}$ is strictly monotonic increasing sequence and hence prove that it is convergent. 3+2

3. (a) State the Limit form of Comparison Test in a series.

(b) Test the convergence of the series $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$, for $x > 0$. 2+3

4. (a) Use Mean Value Theorem to prove that $0 < \frac{1}{x}\log\frac{e^x - 1}{x} < 1$.

(b) Evaluate : $\underset{x\to 1}{Lt}\left\{\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right\}$. 3+2

5. Expand $\log_e(1 + x)$ in infinite series in powers of x, assuming the validity of expansion. 5

6. Find the extreme (maximum and minimum) values (if any) of $f(x, y)$ where $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$. 5

Group - C

[Differential Equation - II]

Unit - 2

(Marks : 5)

Answer ***any one*** question.

7. Solve : $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x\log x$. 5

8. Apply Charpit's method to find the complete solution of the Partial Differential Equation :

$$z^2\left\{z^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} = 1.$$ 5

Group - D

[Vector Algebra]

Unit - 3

(Marks : 5)

Answer ***any one*** question.

9. Prove by vector method that if the diagonals of a quadrilateral bisect each other, then the quadrilateral is a parallelogram. 5

10. (a) Prove that $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0}$.

(b) Find the condition for which $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$. 3+2

Group - E

[Discrete Mathematics]

Unit - 4

(Marks : 30)

Answer ***any three*** questions.

11. (a) Using the principle of mathematical induction, prove that $\left(10^{2n-1}+1\right)$ is divisible by 11, for all $n \in \mathbb{N}$.

(b) Find all positive integral solutions of $5x + 7y = 100$. 5+5

12. (a) If g.c.d.$(a, b) = k$, prove that g.c.d.$\left(a^2, b^2\right) = k^2$.

(b) Examine the ISBN number 81-213-0871-9 is valid or not. 5+5

13. (a) Find the all solutions of the following system of congruences :

$x \equiv 3 \pmod 5$

$x \equiv 4 \pmod 7$

$x \equiv 6 \pmod 9$

(b) Find the unit digit in 3^{909}. 5+5

14. (a) Using Fermat's theorem find the remainder when 10^{515} is divided by 7.

(b) If p and $p^2 + 8$ are both prime numbers, then prove that $p = 3$. 5+5

15. (a) Express the Boolean function $f = (x + y + z)(xy + x'z)'$ in C.N.F. in the variables x, y, z.

(b) Define NAND logic gate and draw a circuit using only NAND logic gate that realizes the truth function $f(x, y, z) = x + yz$. 5+(1+4)