

2019

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : CC/GE-2

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.

প্রাপ্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক

বিভাগ - ক

(মান : ১০)

১। সঠিক উত্তর চিহ্নিত করো :

১×১০

(ক) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ অনুক্রমটির গরিষ্ঠ অধসীমা (greatest lower bound) হল(অ) ∞ (আ) 1 (ই) 0 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।(খ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ শ্রেণিটি

(অ) অভিসারী (আ) অপসারী (ই) সসীমভাবে দোদুল্যমান (ঈ) অসীমভাবে দোদুল্যমান।

(গ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} =$ (অ) ∞ (আ) 0 (ই) 1 (ঈ) অসংজ্ঞাত।(ঘ) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = e^{4x}$ অবকল সমীকরণটির C. F. হল(অ) $C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$ (আ) $C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ (ই) $C_1e^{6x} + C_2e^{-x}$

(ঈ) এগুলির কোনোটিই নয়।

(ঙ) $z = (x+a)(y+b)$ অপেক্ষকটি থেকে a এবং b অপসারণ করলে যে আংশিক অন্তরকলন সমীকরণ (partial differential equation) পাওয়া যাবে, সেটি হল(অ) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (আ) $Z = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ (ই) $Z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

Please Turn Over

(চ) যদি $(ai + 6j + 9k)$ এবং $(-5i + 2j + bk)$ ভেক্টর দুটি সমরেখ (collinear) হয়, তবে

(অ) $a = b = 1$

(আ) $a = -15, b = 3$

(ই) $a = 3, b = 9$

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ছ) $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্নিহিত কোণের পরিমাপ হল

(অ) 0

(আ) $\frac{\pi}{3}$

(ই) $\frac{\pi}{4}$

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(জ) যদি 7^{30} কে 4 দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে ভাগশেষ হবে

(অ) 0 (আ) 1 (ই) 2 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঝ) $9x + 6y = 1$, এই Diophantine সমীকরণটির বীজ (solution) আছে

(অ) কেবলমাত্র একটি

(আ) দুটি

(ই) একটিও নয়

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঞ) বুলীয় বীজগণিতে $(x + y)' + (x + y)'$

(অ) y (আ) x (ই) x' (ঈ) xy -এর সাথে সমান।

বিভাগ - ঝ

Differential Calculus II

(ইউনিট - ১)

(মান : ১৫)

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

২। অনুক্রম $\left\{\frac{4n+3}{3n+4}\right\}$ -এর জন্য দেখাও তা —

(ক) ক্রমবর্ধমান কিনা

(খ) উপরে নাকি নীচে সীমাবদ্ধ

(গ) অভিসারী কিনা, যুক্তি সহকারে।

২+২+১

৩। (ক) ব্যাখ্যা করো : অলটারনেটিং শ্রেণি (Alternating series)

(খ) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ শ্রেণিটির অভিসারীত্ব পরীক্ষা করো।

২+৩

৪। (ক) Rolle-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

(খ) 'a'-এর মান বের করো যাতে $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$ -এর অস্তিত্ব সসীম (exists finitely) হয় এবং এর সীমা (limit) নির্ণয় করো।

২+৩

৫। x-এর মান নির্ণয় করো, যেখানে $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ -এর চরম অথবা অবম মান থাকবে এবং যদি থাকে সেই মানগুলো নির্ণয় করো।

৩+২

৬। Lagrange-র 'অনির্ধারিত গুণক'-এর সাহায্যে $S = 2(xy + yz + zx)$ -এর প্রান্তিক বিন্দু নির্ণয় করো, যেখানে $xyz = a^3$; অতঃপর ওই বিন্দুতে S-এর চরম বা অবম মান নির্ণয় করো।

৫

বিভাগ - গ

Differential Equation II

(ইউনিট - ২)

(মান : ৫)

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৭। $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$ অবকল সমীকরণের আইগেন মানসমূহ এবং আইগেন অপেক্ষকগুলি নির্ণয় করো, যেখানে $y(0) = 0, y(a) = 0, \lambda, a > 0$ ।

৫

৮। Lagrange-র পদ্ধতি দ্বারা সমাধান করো :

$$py + qx = xyz^2(x^2 - y^2), \text{ where } p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ and } q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

৫

বিভাগ - ঘ

Vector Algebra

(ইউনিট - ৩)

(মান : ৫)

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৯। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো যে, যে-কোনো ত্রিভুজ ΔABC -এর ক্ষেত্রে $c = a \cos B + b \cos A$, যেখানে চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ।

৫

১০। ধ্রুবক বল $4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ দ্বারা $\hat{i} + 2\hat{j}$ বিন্দু থেকে $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ বিন্দুতে একটি কণার সরণ ঘটে। বলগুলি দ্বারা কার্যের পরিমাপ করো।

৫

Please Turn Over

বিভাগ - ঙ

Discrete Mathematics

(ইউনিট - ৪)

(মান : ৩০)

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

- ১১। (ক) প্রত্যেক পূর্ণসংখ্যা $n \geq 1$ -এর জন্য প্রমাণ করো, $10^n + 10^{n-1} + 1$ সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য।
 (খ) যদি $d | a$ এবং $d | c$, যেখানে a, c, d ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তবে প্রমাণ করো যে, $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{d} \gcd(a, c)$ । ৫+৫
- ১২। (ক) যদি n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n^3 + 1$ একটি মৌলিক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $n = 1$ ।
 (খ) নিম্নলিখিত congruence-গুলির সমস্ত সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো :
 $x \equiv 2 \pmod{3}$
 $x \equiv 3 \pmod{4}$
 $x \equiv 4 \pmod{5}$ ৫+৫
- ১৩। (ক) যখন $2^{18} + 9^{18}$ -কে 17 দিয়ে ভাগ করা হয়, তখন Fermat's little theorem ব্যবহার করে ভাগশেষ নির্ণয় করো।
 (খ) কোন বস্তুর জন্য প্রদত্ত UPC-টি সঠিক কিনা বলো : 8901030114519 ৫+৫
- ১৪। (ক) ছয় সদস্যের একটি Round-Robin tournament গঠন করো।
 (খ) $(x + y + z)(xy + x'z)$ বুলীয় অপেক্ষকটিকে Disjunctive Normal Form (DNF)-এ রূপান্তরিত করো
 x, y, z চলরাশিগুলির জন্য। ৫+৫
- ১৫। (ক) Wilson-এর উপপাদ্যটি লেখো।
 $\phi(260)$ বের করো।
 (খ) একটি লজিক বর্তনী নির্মাণ করো যেটি এই সত্যসারণিকে সিদ্ধ করে : (২+৩)+৫

A	B	C	E
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

(Marks : 10)

1. Choose the correct alternative :

1×10

- (a) The greatest lower bound of the sequence $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ is
 (i) ∞ (ii) 1 (iii) 0 (iv) None of these.
- (b) The series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$
 (i) is convergent (ii) is divergent (iii) oscillates finitely (iv) oscillates infinitely.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} =$
 (i) ∞ (ii) 0 (iii) 1 (iv) undefined.
- (d) The complementary function (C.F.) of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = e^{4x}$ is
 (i) $C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$ (ii) $C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$
 (iii) $C_1e^{6x} + C_2e^{-x}$ (iv) None of these.
- (e) The partial differential equation formed by eliminating the arbitrary constants a and b from the function $z = (x + a)(y + b)$ is
 (i) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (ii) $Z = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$
 (iii) $Z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ (iv) None of these.
- (f) If the vectors $(a\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k})$ and $(-5\hat{i} + 2\hat{j} + b\hat{k})$ be collinear, then
 (i) $a = b = 1$ (ii) $a = -15, b = 3$
 (iii) $a = 3, b = 9$ (iv) None of these.

Please Turn Over

- (g) The angle between the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ is
- (i) 0 (ii) $\frac{\pi}{3}$
 (iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) None of these.
- (h) When 7^{30} is divided by 4, the remainder will be
 (i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) None of these.
- (i) The Diophantine equation $9x + 6y = 1$ has
 (i) only one solution (ii) two solutions
 (iii) no solutions (iv) None of these.
- (j) In a Boolean Algebra $(x + y)' + (x + y)'$ is equal to
 (i) y (ii) x (iii) x' (iv) xy .

Group – B**Differential Calculus II**

(Unit – 1)

(Marks : 15)

Answer any three questions.

2. Consider the sequence $\left\{ \frac{4n+3}{3n+4} \right\}$. Examine —
- (a) whether it is monotonic increasing or decreasing
 (b) whether it is bounded above or below
 (c) state whether it is convergent with justification. 2+2+1
3. (a) Define a Alternating series.
 (b) Examine the convergence of the series
- $$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$
- 2+3
4. (a) State Rolle's theorem.
 (b) Find the value of 'a' so that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$ exists finitely and also find the limit. 2+3
5. Find at what values of x the function $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ has maxima or minima and find the corresponding maxima or minima of the function, if exists. 3+2

(7)

M(2nd Sm.)-Mathematics-CC/GE-2/CBCS

6. Using the Lagrange's Method of undetermined multiplier, find the stationary point of $S = 2(xy + yz + zx)$ subject to $xyz = a^3$. Also find the maximum or minimum value of S at this point. 5

Group - C

Differential Equation II

(Unit - 2)

(Marks : 5)

Answer *any one* question.

7. Find the eigen values and eigen functions of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(a) = 0, \lambda, a > 0. \quad 5$$

8. Solve by Lagrange's method :

$$py + qx = xyz^2(x^2 - y^2), \text{ where } p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ and } q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad 5$$

Group - D

Vector Algebra

(Unit - 3)

(Marks : 5)

Answer *any one* question.

9. Prove (by vector method) that in any triangle ΔABC , $c = a \cos B + b \cos A$, symbols having usual meanings. 5
10. A particle, acted on by constant forces $4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ is displaced from the point $\hat{i} + 2\hat{j}$ to $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$. Find the work done by the forces. 5

Group - E

Discrete Mathematics

(Unit - 4)

(Marks : 30)

Answer *any three* questions.

11. (a) Prove that 3 divides $10^n + 10^{n-1} + 1$, for all natural numbers $n \geq 1$.

(b) If $d|a$ and $d|c$, where a, c, d are positive integers, then prove that $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{d} \gcd(a, c)$. 5+5

Please Turn Over

12. (a) If n is a positive integer such that $n^3 + 1$ is a prime number, then prove that $n = 1$.

(b) Solve the following system of congruences :

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}.$$

5+5

13. (a) Using Fermat's little theorem, find the remainder when $2^{18} + 9^{18}$ is divided by 17.

(b) Is 8901030114519 a correct UPC for some product?

5+5

14. (a) Find a Round-Robin tournament schedule for 6 teams.

(b) Express the Boolean expression $(x + y + z)(xy + x'z)$ in DNF in the variables x, y, z .

5+5

15. (a) State Wilson's theorem.

Find $\phi(260)$.

(b) Construct a logic circuit which would satisfy the truth table :

A	B	C	E
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

(2+3)+5