2018

MATHEMATICS – GENERAL

Paper : GE/CC-1

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১ নং প্রশ্ন এবং ***যে-কোনো নয়টি*** প্রশ্নের উত্তর দাও, কমপক্ষে ***প্রতি ইউনিট*** থেকে ***একটি*** করে নিয়ে।

১। সবগুলি প্রশ্নের উত্তর দাও, সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো ঃ ২×১০

(ক) যদি $z = 1 + i \tan\theta$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে $arg\, z$ হল

(অ) θ (আ) $\pi - \theta$ (ই) $\theta - \pi$ (ঈ) $\frac{\pi}{2} - \theta$

(খ) $x^4 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণটির

(অ) একটি মাত্র ধনাত্মক বাস্তব বীজ আছে।

(আ) কেবলমাত্র দুইটি ঋণাত্মক বাস্তব বীজ আছে।

(ই) কেবলমাত্র দুইটি ধনাত্মক বাস্তব বীজ আছে।

(ঈ) চারটি কাল্পনিক বীজ আছে।

(গ) $x = \dfrac{3y}{y-5}$ বক্রের উলম্ব স্পর্শপ্রবণ রেখাটি হল

(অ) $x = 5$ (আ) $x = 3$ (ই) $y = 5$ (ঈ) $y = 3$

(ঘ) $f(x) = \sqrt{\log_e \frac{3x - x^2}{2}}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল হল

(অ) $(1, 2]$ (আ) $[1, 2)$ (ই) $(1, 2)$ (ঈ) $[1, 2]$

(ঙ) $f(x) = x^2 - 2x$ অপেক্ষকটি নিম্নলিখিত x-এর কোন্ মানের জন্য অবশ্যই ক্রমবর্ধমান (strictly increasing)?

(অ) $x > 0$ (আ) $x < 1$ (ই) $x > 1$ (ঈ) $1 < x < 2$.

(চ) $\sqrt[3]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4} = x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2}$ অবকল সমীকরণটির মাত্রা (degree) হল

(অ) 1 (আ) 2 (ই) 3 (ঈ) 4

(ছ) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{3x^2}{1+x^3}y=\dfrac{\sin^2 x}{1+x}$ -এই অবকল সমীকরণটির সমাকল গুণকটি হল

(অ) e^{1+x^3} (আ) $\log\left(1+x^3\right)$ (ই) $1+x^3$ (ঈ) $\dfrac{1}{1+x^3}$

(জ) একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ একটি অধিবৃত্ত করবে (represent a parabola) যদি

(অ) $D=0$

(আ) $D=0,\ \Delta\neq 0$

(ই) $\Delta\neq 0$

(ঈ) উপরের কোনোটিই নয়

(ঝ) একটি বহির্বিন্দু (exterior point) থেকে কোনো অধিবৃত্তের উপর অঙ্কিত পরস্পর লম্ব দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ হল

(অ) নিয়ামক বৃত্ত (the director circle)

(আ) নিয়ামক (the directrix)

(ই) উপাক্ষ (the major axis)

(ঈ) পরাক্ষ (the minor axis)

(ঞ) অক্ষদ্বয়কে একই মূলবিন্দুর সাপেক্ষে 30° কোণে ঘোরানো হলে (2, 4) বিন্দুটির পরিবর্তিত স্থানাঙ্কদ্বয় হল

(অ) $\left(\sqrt{3}+2,\ 2\sqrt{3}-1\right)$

(আ) $\left(\sqrt{3}-2,\ 2\sqrt{3}-1\right)$

(ই) $\left(\sqrt{3}+2,\ 2\sqrt{3}+1\right)$

(ঈ) $\left(\sqrt{3}-2,\ 2\sqrt{3}+1\right)$

Unit - I

(Algebra-I)

২। (ক) De-Moivre's উপপাদ্যের সাহায্যে সমাধান করো ঃ $x^5 = 1$

(খ) $3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 9x + 1$ রাশিমালাটিকে $2x + 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ নির্ণয় করো। ২+৩

৩। Matrix Method-এর সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণ সমূহের সমাধান করো ঃ

$3x - 2y + z = -1,\ -x + y + 7z = 1,\ 4x - 3y - 2z = -2$ ৫

৪। Cardan's পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করো ঃ $x^3 - 6x - 9 = 0$ ৫

Unit - II

(Differential Calculus-I)

৫। যদি $y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$ হয়, প্রমাণ করো যে, $y_2\left(x^2-1\right)+xy_1-m^2y=0$ ।

এখান থেকে দেখাও যে, $\left(x^2-1\right)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+\left(n^2-m^2\right)y_n=0$ । ৩+২

৬। যদি $u=\tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}$ হয়, তবে অয়লারের উপপাদ্য প্রয়োগ করে দেখাও যে, $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\sin 2u$ ৫

৭। $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$-এর সমস্ত স্পর্শপ্রবণ রেখাগুলি নির্ণয় করো। ৫

৮। (ক) দেখাও যে $\log_e(1+x)>x-\frac{x^2}{2},\ x>0$ ।

(খ) দেখাও যে $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

অপেক্ষকটি (0, 0) বিন্দুতে অসন্তত। ২+৩

৯। (ক) দেখাও যে $x^2\log\left(\frac{1}{x}\right)$-এর চরম মান $\frac{1}{2e}$ ।

(খ) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ অপেক্ষকটির সীমা নির্ণয় করো (x একটি বাস্তব রাশি)। ৩+২

Unit - III

(Differential Equation-I)

১০। (ক) $xy = Ae^x + Be^{-x} + x^2$ সমীকরণ থেকে অবকল সমীকরণটি নির্ণয় করো, যেখানে A, B প্রচল (Parameter)।

(খ) সমাধান করো ঃ $\frac{dy}{dx}-xy=xy^3$ । ২+৩

১১। $y = px + ap(1-p)$, যেখানে $p=\frac{dy}{dx}$, সমীকরণটির সাধারণ ও বিশিষ্ট সমাধান নির্ণয় করো। ৫

১২। 'ভ্যারিয়েশন অফ্ প্যারামিটার' পদ্ধতিতে সমাধান করো ঃ ৫

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=\frac{e^x}{1+e^x}$$

Unit - IV

(Coordinate Geometry)

১৩। (ক) $6x^2 - 5xy + y^2 = 0$ সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণটি নির্ণয় করো।

(খ) $\frac{8}{r} = 4 - 5\cos\theta$ কণিকটির প্রকৃতি (nature) নির্ণয় করো। ৩+২

১৪। প্রমাণ করো $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$ সমীকরণটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ যার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 3 একক। ৫

১৫। $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের সাপেক্ষে $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের স্পর্শকের পোলের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো। ৫

১৬। $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 4z + 8 = 0 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 5y - 6z + 2$ বৃত্তগামী এমন একটি গোলকের সমীকরণ নির্ণয় করো, যাতে প্রদত্ত বৃত্তটি ওই গোলকের একটি great circle হয়। ৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Answer ***question no.*** **1** and ***any nine*** from the rest taking at least ***one*** question from each unit.

1. Choose the correct option from each of the following questions : 2×10

(a) If $z = 1 + i \tan\theta$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, then *arg z* is

(i) θ (ii) $\pi - \theta$ (iii) $\theta - \pi$ (iv) $\frac{\pi}{2} - \theta$

(b) The equation $x^4 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$ has

(i) exactly one positive real root.

(ii) exactly two negative real roots.

(iii) exactly two positive real roots.

(iv) four imaginary roots.

(c) The vertical asymptote of the curve $x = \frac{3y}{y-5}$ is

(i) $x = 5$ (ii) $x = 3$ (iii) $y = 5$ (iv) $y = 3$

(d) The domain of definition of the function $f(x)=\sqrt{\log_e \frac{3x-x^2}{2}}$ is :

(i) $(1, 2]$ (ii) $[1, 2)$ (iii) $(1, 2)$ (iv) $[1, 2]$

(e) The function $f(x) = x^2 - 2x$ is strictly increasing for

(i) $x > 0$ (ii) $x < 1$ (iii) $x > 1$ (iv) $1 < x < 2$

(f) The degree of the differential equation $\sqrt[3]{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^4} = x^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ is

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 4

(g) The integrating factor of the differential equation $\frac{dy}{dx} - \frac{3x^2}{1+x^3} y = \frac{\sin^2 x}{1+x}$ is

(i) e^{1+x^3} (ii) $\log\left(1+x^3\right)$ (iii) $1 + x^3$ (iv) $\frac{1}{1+x^3}$

(h) The condition that a general equation of second degree will represent a parabola if

(i) $D = 0$ (ii) $D = 0, \Delta \neq 0$ (iii) $\Delta \neq 0$ (iv) None of these

(i) The locus of the point of intersection of perpendicular tangents drawn from an exterior point to a parabola is

(i) the director circle

(ii) the directrix

(iii) the major axis

(iv) the minor axis

(j) The coordinate axes are rotated through an angle 30° with the same origin. Then the new coordinates of the point (2, 4) is

(i) $\left(\sqrt{3}+2,\ 2\sqrt{3}-1\right)$

(ii) $\left(\sqrt{3}-2,\ 2\sqrt{3}-1\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}-2,\ 2\sqrt{3}+1\right)$

(iv) $\left(\sqrt{3}-2,\ 2\sqrt{3}+1\right)$

Unit - I

(Algebra-I)

2. (a) Solve $x^5 = 1$ by De-Moivre's theorem.

(b) Find the remainder if the polynomial $3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 9x + 1$ is divisible by $2x + 1$. 2+3

3. Solve the following system of equations by Matrix Method :

$3x - 2y + z = -1, -x + y + 7z = 1, 4x - 3y - 2z = -2$ 5

4. Solve by Cardan's method : $x^3 - 6x - 9 = 0$. 5

Unit - II

(Differential Calculus-I)

5. If $y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$, prove that $y_2\left(x^2-1\right) + xy_1 - m^2y = 0$. Hence show that

$\left(x^2-1\right)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + \left(n^2-m^2\right)y_n = 0$. 3+2

6. If $u = \tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}$, then applying Euler's theorem show that $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$. 5

7. Find all the asymptotes of $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$. 5

8. (a) Show that $\log_e(1+x) > x - \frac{x^2}{2},\ x > 0$.

(b) Show that the function $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x, y) = (0,0) \end{cases}$

is not continuous at (0, 0). 2+3

9. (a) Show that the maximum value of $x^2 \log\left(\frac{1}{x}\right)$ is $\frac{1}{2e}$.

(b) Find the range of real valued function of a real variable $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. 3+2

Unit - III

(Differential Equation-I)

10. (a) Find the differential equation from the equation $xy = Ae^x + Be^{-x} + x^2$, where A, B are parameters.

(b) Solve : $\frac{dy}{dx} - xy = xy^3$. 2+3

11. Obtain general and singular solution of $y = px + ap(1-p)$, where $p = \frac{dy}{dx}$. 5

12. Solve by method of variation of parameters $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{e^x}{1+e^x}$. 5

Unit - IV

(Coordinate Geometry)

13. (a) Find the acute angle between the pair of lines $6x^2 - 5xy + y^2 = 0$.

(b) Find the nature of the conic $\frac{8}{r} = 4 - 5\cos\theta$. 3+2

14. Prove that the equation $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$ represents a parabola whose latus rectum is 3 units. 5

15. Find the locus of the poles of tangents to the circle $x^2 + y^2 = r^2$ with respect to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 5

16. Find the equation of the sphere through the circle

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 4z + 8 = 0 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 5y - 6z + 2$$

such that the given circle is a great circle of the sphere. 5
