2024

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-3

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। সঠিক বিকল্পটি নির্বাচন করো ঃ ১×১০

(ক) $\int_{-a}^{a} |x|\,dx$ -এই definite integral-টির মান নিম্নের কোন্‌টির সাথে সমান?

(অ) a (আ) $2a$

(ই) a^2 (ঈ) 0.

(খ) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x\,dx$ -এর মান হল

(অ) π (আ) 2π

(ই) $\pi/2$ (ঈ) 0.

(গ) সমাকল $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ অস্তিত্ব থাকবে

(অ) যখন $m > 1, n > 1$ (আ) যখন $m > -1, n > -1$

(ই) যখন $m \geq 0, n \geq 0$ (ঈ) যখন $m > 0, n > 0$.

(ঘ) Four significant figures পর্যন্ত 5.45852 সংখ্যাটির আসন্নমান হবে

(অ) 5.457 (আ) 5.459

(ই) 5.458 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঙ) যদি $f(0) = 4.76, f(1) = 5.24$ হয়, তবে Trapezoidal rule দ্বারা $\int_0^1 f(x)\,dx$ -এর আসন্নমান হবে

(অ) 6 (আ) 5

(ই) 3.12 (ঈ) 3.98.

(চ) $3 - 5x - x^2 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির মধ্যে একটি থাকবে

(অ) 2 এবং 3-এর মধ্যে (আ) 1 এবং 4-এর মধ্যে

(ই) 1 এবং 2-এর মধ্যে (ঈ) 5 এবং 6-এর মধ্যে।

(ছ) এদের কোন্‌টি Convex Set নয়?

(অ) $X = \{x : |x| < 4\}$ (আ) $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$

(ই) $X = \{(x, y) : 2x^2 + 3y^2 \geq 9\}$ (ঈ) $X = \{(x, y) : 3x^2 + 4y^2 \leq 16\}$.

(জ) $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 7,\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 13$ এই system-টির basic solutions-এর সংখ্যা

(অ) 10 (আ) 12

(ই) 11 (ঈ) 9.

(ঝ) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ সেটের চরম বিন্দুগুলি থাকবে

(অ) বৃত্তের মধ্যে (আ) বৃত্তের উপরে

(ই) বৃত্তের বাইরে (ঈ) ব্যাসের উপরে।

(ঞ) একটি সুষম পরিবহন সমস্যাতে m সংখ্যক উৎস এবং n সংখ্যক গন্তব্য $(m, n \geq 2)$ থাকলে সঠিক সংখ্যক basic variables-এর সংখ্যা হবে

(অ) $m + n$ (আ) $m - n + 1$

(ই) $m + n - 1$ (ঈ) $m - n$.

ইউনিট - ১

(সমাকলন বিদ্যা)

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) প্রমাণ করো যে, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \dfrac{1}{m+1}\left[m > -1\right]$. ৫

(খ) দেখাও যে, $\int_0^\infty e^{-4x}\, x^{\frac{2}{3}}\, dx = \dfrac{3}{128}\sqrt{\pi}$. ৫

(গ) Beta function-এর সংজ্ঞা ব্যবহার করে প্রমাণ করো $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx = \dfrac{3\pi}{16}$. ৫

(ঘ) যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$ হয়, দেখাও যে $I_{n+1} - I_{n-1} = \dfrac{1}{n}$। এই সম্পর্কটি ব্যবহার করে $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x\, dx$ -এর মান নির্ণয় করো। ৩+২

(ঙ) Astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ -এর সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। ৫

ইউনিট - ২

(সাংখ্যিক পদ্ধতি)

৩। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) (অ) যদি $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$, $h = 1$, Δy-এর মান নির্ণয় করো।

(আ) $\frac{7}{6}$-এর মান 1.16 দ্বারা approximate করা হলে, percentage error নির্ণয় করো। ৩+২

(খ) Newton Forward Interpolation সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত সারণি থেকে $f(0.16)$-এর মান নির্ণয় করো ঃ ৫

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	1.005	1.020	1.045	1.081

(গ) Newton–Raphson পদ্ধতি ব্যবহার করে $x^3 + x^2 - 3 = 0$ সমীকরণটির three significant figures পর্যন্ত নির্ভুল বীজ নির্ণয় করো। ৫

(ঘ) 5টি sub-intervals নিয়ে Trapezoidal Rule দ্বারা $\int_0^1 \left(4x - 3x^2\right) dx$ -এর মান নির্ণয় করো । Exact value-টি গণনা করো এবং relative error নির্ণয় করো। ৫

(ঙ) Bisection পদ্ধতি ব্যবহার করে $x^3 - x - 1 = 0$ সমীকরণটি সমাধান করে three significant figures পর্যন্ত নির্ভুল ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক বীজের মান নির্ণয় করো। ৫

(চ) সঠিক interpolation সূত্র ব্যবহার করে নিম্ন প্রদত্ত সারণী থেকে $f(0.5)$-এর মান নির্ণয় করো ঃ ৫

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	7	26	63	124

(ছ) $h = 1$ ধরে নিয়ে $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3$-এর মান নির্ণয় করো। ৫

ইউনিট - ৩

(রৈখিক প্রোগ্রামিং)

৪। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) দেখাও যে, Set $S = \{(x_1, x_2) : 3x_1 + x_2 \le 10, x_1 - 2x_2 \le 1, x_1, x_2 \ge 0\}$ একটি convex set. ৫

(খ) এক আসবাবপত্র প্রস্তুতকারক তার available resources ব্যবহার করে দুই ধরনের জিনিস, চেয়ার ও টেবিল তৈরি করার পরিকল্পনা করে। তার কাছে 4000 board ft কাঠ ও 450 man-hour আছে। একটি চেয়ার তৈরি করতে 5 board ft কাঠ এবং 10 man-hour লাগে এবং তা বিক্রি করে ₹ 40.00 লাভ হয়। একটি টেবিল তৈরি করতে 20 board ft কাঠ এবং 15 man-hour লাগে এবং তা বিক্রি করে ₹ 60.00 লাভ হয়। একটি রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যা রচনা করো, যাতে তার সর্বাধিক লাভ হয়। ৫

(গ) নিম্নের প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের একটি basic feasible solution নির্ণয় করো ঃ ৫

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 3,$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4.$$

(ঘ) লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম সমস্যাটির সমাধান করো ঃ ৫

চরম $Z = 3x_1 + 2x_2$

যেখানে,

$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(ঙ) নিম্নলিখিত profit matrix-টির জন্য optimal assignment এবং optimal profit নির্ণয় করো ঃ ৫

	A	B	C	D
I	7	8	5	6
II	5	2	3	4
III	4	6	2	1
IV	3	4	1	8

(চ) Big M পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক সমস্যার সমাধান করো ঃ ৫

চরম $Z = 2x_1 + 3x_2$

যেখানে,

$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(ছ) নীচের পরিবহন সমস্যাটি VAM পদ্ধতিতে সমাধান করো ঃ ৫

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	2	3	11	7	6
O_2	1	0	6	1	1
O_3	5	8	15	9	10
	7	5	3	2	

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Choose the correct option : 1×10

(a) The value of definite integral $\int_{-a}^{a} |x| dx$ is equal to

(i) a (ii) $2a$

(iii) a^2 (iv) 0.

(b) The value of $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x \, dx$ is

(i) π (ii) 2π

(iii) $\pi/2$ (iv) 0.

(c) The integral $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ exists

(i) when $m > 1$, $n > 1$ (ii) when $m > -1$, $n > -1$

(iii) when $m \geq 0$, $n \geq 0$ (iv) when $m > 0$, $n > 0$.

(d) Round-off of the number 5.45852 up to four significant figures is

(i) 5.457 (ii) 5.459

(iii) 5.458 (iv) None of these.

(e) Let $f(0) = 4.76$, $f(1) = 5.24$ and then the Trapezoidal rule gives approximate value of $\int_0^1 f(x) dx$ is

(i) 6 (ii) 5

(iii) 3.12 (iv) 3.98.

(f) One of the roots of $3 - 5x - x^2 = 0$ lies in between

(i) 2 and 3 (ii) 1 and 4

(iii) 1 and 2 (iv) 5 and 6.

(g) Which one of the following is not a convex set?

(i) $X = \{x : |x| < 4\}$ (ii) $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$

(iii) $X = \{(x, y) : 2x^2 + 3y^2 \geq 9\}$ (iv) $X = \{(x, y) : 3x^2 + 4y^2 \leq 16\}$.

(h) The number of basic solutions of the system

$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 7,\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 13$ is

(i) 10 (ii) 12

(iii) 11 (iv) 9.

(i) The extreme points of the set $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ are the points

(i) inside the circle (ii) on the circle

(iii) outside the circle (iv) on the diameter.

(j) In a balanced T.P. having 'm' origins and 'n' destinations ($m, n \geq 2$) the exact number of basic variables is

(i) $m + n$ (ii) $m - n + 1$

(iii) $m + n - 1$ (iv) $m - n$.

Unit - 1

(Integral Calculus)

2. Answer ***any three*** questions :

(a) Prove that $\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}\,[m > -1]$. 5

(b) Show that $\int_0^\infty e^{-4x}\, x^{\frac{2}{3}}\, dx = \frac{3}{128}\sqrt{\pi}$. 5

(c) Using the definition of Beta function, prove that $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx = \frac{3\pi}{16}$. 5

(d) If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$, show that $I_{n+1} - I_{n-1} = \frac{1}{n}$. Use this relation to evaluate $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x\, dx$. 3+2

(e) Find the total length of the astroid : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 5

Unit - 2

(Numerical Methods)

3. Answer ***any four*** questions :

(a) (i) If $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$, $h = 1$, find Δy.

(ii) Find the percentage error in approximation of $\frac{7}{6}$ by 1.16. 3+2

(b) From the following table, find $f(0.16)$ using Newton Forward Interpolation formula : 5

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	1.005	1.020	1.045	1.081

(c) Solve the equation $x^3 + x^2 - 3 = 0$ by Newton–Raphson method correct to three significant figures. 5

(d) Evaluate $\int_0^1 \left(4x - 3x^2\right) dx$ taking 5 sub-intervals by Trapezoidal Rule. Compute the exact value and find the relative error. 5

(e) Solve $x^3 - x - 1 = 0$ to find the smallest positive root correct to three significant figures using the method of Bisection. 5

(f) Using appropriate interpolation formula, find the value of $f(0.5)$ from the following data : 5

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	7	26	63	124

(g) Taking $h = 1$, evaluate $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) x^3$. 5

Unit - 3

(Linear Programming)

4. Answer ***any four*** questions :

(a) Show that the Set $S = \{(x_1, x_2) : 3x_1 + x_2 \leq 10, x_1 - 2x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0\}$ is a convex set. 5

(b) A furniture manufacturer plans to make only two products— chairs and tables from his available resources. He has 4000 board ft. of wood and 450 man-hour. A chair requires 5 board ft. of wood and 10 man-hour and yields a profit of ₹ 40.00, while one table requires 20 board ft. of wood and 15 man-hour and yields a profit of ₹ 60. Pose an L.P.P. so that he can maximize his profit. 5

(c) Find a basic feasible solution of the following system : 5

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 3,$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4.$$

(d) Solve graphically the following LPP : 5

Maximize $Z = 3x_1 + 2x_2$

subject to,

$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(e) Find the optimal assignment and the corresponding optimal profit from the following profit matrix: 5

	A	B	C	D
I	7	8	5	6
II	5	2	3	4
III	4	6	2	1
IV	3	4	1	8

(f) Solve by Big M method the following LPP : 5

Maximize $Z = 2x_1 + 3x_2$

subject to,

$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(g) Solve the following Transportation Problem by VAM method : 5

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	2	3	11	7	6
O_2	1	0	6	1	1
O_3	5	8	15	9	10
	7	5	3	2	