2022

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-3

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

Symbols and notations have their usual meaning

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। নিম্নলিখিত সব প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ ১×১০

(ক) $\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ -এর মান হল

(অ) 0 (আ) 1

(ই) a (ঈ) $\frac{a}{2}$

(খ) যদি $\int_0^{\infty} e^{-kx}x^{n-1}dx = \lambda\Gamma(n)$ হয়, তাহলে λ-এর মান হবে

(অ) k^{-n} (আ) k^{n-1}

(ই) $n!$ (ঈ) n^{-k}.

(গ) $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$-এর মান হল

(অ) $\sqrt{\pi}$ (আ) $\frac{\pi}{2}$

(ই) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (ঈ) π.

(ঘ) তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত 2.679556 সংখ্যাটির আসন্নমান হবে

(অ) 2.679 (আ) 2.680

(ই) 2.68 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঙ) $h=1$ ধরে $\Delta\left(\frac{1}{x+5}\right)$-এর মান হল

(অ) $\frac{1}{x+5}$ (আ) $\frac{1}{x+6}$

(ই) $\frac{1}{(x+5)(x+6)}$ (ঈ) $-\frac{1}{(x+5)(x+6)}$

(চ) $y=f(x)$ অপেক্ষক এবং $y_i=f(x_i)$, $i=0,1,2,...,12$ তবে অপেক্ষকের interpolation polynomial-এর degree-র মান হবে

(অ) 10 (আ) 11

(ই) 12 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ছ) যদি (1, 2, 4), (2, 2, 8) এবং (1, k, 4) ভেক্টর তিনটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হয়, তবে k-এর মান হবে

(অ) 0 (আ) 1

(ই) 2 (ঈ) –1

(জ) n-খানা চলরাশি দিয়ে m-খানা বাধা দিয়ে তৈরি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার মৌল সমাধানের সংখ্যা, যেখানে $m<n$, হল

(অ) $n!$ (আ) ${}^nP_m$

(ই) ${}^nC_m$ (ঈ) $m!$

(ঝ) নিম্নের সমীকরণগুলির Basic Feasible Solution-এর মান হবে ঃ

$$2x_1+x_2-x_3=3$$
$$x_1+2x_2+3x_3=5$$

(অ) (1, 2, 0) (আ) $\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3},0\right)$

(ই) $\left(0,\frac{14}{5},-\frac{1}{5}\right)$ (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঞ) একটি Artificial Variable-এর চরম মান হবে

(অ) ধনাত্মক (আ) ঋণাত্মক

(ই) শূন্য (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

ইউনিট - ১

(সমাকলন বিদ্যা)

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) যদি $I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx; m,n$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা >1, দেখাও যে $I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$। ৫

(খ) দেখাও যে ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \, dx = \pi$। ৫

(গ) মান নির্ণয় করো ঃ $\int_3^4 \int_1^2 \frac{dydx}{(x+y)^2}$। ৫

(ঘ) দেখাও যে $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)...\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$। ৫

(ঙ) নিম্নলিখিত curve-টির পরিসীমা নির্ণয় করো ঃ ৫

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$$

ইউনিট - ২

(সাংখ্যিক পদ্ধতি)

৩। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) (অ) প্রমাণ করো $E\{\Delta f(x)\} = \Delta\{Ef(x)\}$।

(আ) যদি $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$ এবং $h = 1$ হয়, Δy-এর মান নির্ণয় করো। ৩+২

(খ) নিম্নলিখিত সারণিতে missing পদটি নির্ণয় করো ঃ ৫

x	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	6	0	–	6	–	2

(গ) নিউটনের অগ্রসারি অন্তঃমান নির্ণয়ের সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত সারণি থেকে y-এর মান নির্ণয় করো, যখন $x = 0.16$: ৫

x	0.1	0.2	0.3	0.4
y	1.005	1.020	1.045	1.081

(ঘ) Bisection পদ্ধতিতে $x^3 - 4x - 9 = 0$ সমীকরণের 2 ও 3-এর মধ্যে চার সার্থক অঙ্কবিশিষ্ট বাস্তব বীজটি নির্ণয় করো। ৫

(ঙ) Newton-Raphson পদ্ধতি ব্যবহার করে $x^3 - 8x - 4 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজের সঠিক মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো। ৫

(চ) প্রদত্ত ছক থেকে Lagrange's পদ্ধতিতে বহুপদ রাশিমালা নির্ণয় করো ঃ ৫

x	–1	0	2	5
$f(x)$	9	5	3	15

(ছ) Simpson-এর এক-তৃতীয়াংশ নিয়মে চারটি উপঅন্তরাল নিয়ে চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমানে সমাকলন করো ঃ ৫

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ইউনিট - ৩

(রৈখিক প্রোগ্রামিং)

৪। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) পরসমতলের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ করো যে, E^n দেশে একটি পরসমতল সর্বদা উত্তল সেট হবে। ১+৪

(খ) লেখচিত্রের সাহায্যে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটি সমাধান করো ঃ ৫

অবম $Z = 20x_1 + 40x_2$

যেখানে $36x_1 + 6x_2 \geq 108;$

$3x_1 + 12x_2 \geq 36;$

$20x_1 + 10x_2 \geq 100, \quad x_1, x_2 \geq 0.$

(গ) Simplex পদ্ধতিতে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটি সমাধান করো ঃ ৫

চরম $Z = 60x_1 + 50x_2$

যেখানে, $x_1 + 2x_2 \leq 40;$

$3x_1 + 2x_2 \leq 60; \; x_1, x_2 \geq 0।$

(ঘ) নিম্নের প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সকল প্রাথমিক (basic) সমাধানগুলি নির্ণয় করো ঃ

$$2x + 3y - 5z = 5$$

$$4x + 2y + 4z = 6$$

প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রাথমিক ও অপ্রাথমিক (non-basic) চলগুলি লেখো। ৪+১

(ঙ) Dual সমস্যাটি লেখো যেখানে মুখ্য সমস্যাটি হল ৫

চরম $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$

যেখানে $x_1 + 3x_2 + x_4 \geq 4;$

$2x_1 + x_2 \leq 3;$

$x_2 + 4x_3 + x_4 = 1; \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

(চ) নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটি সমাধান করো ঃ ৫

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	10	7	3	6	3
O_2	1	6	8	3	5
O_3	7	4	5	3	7
b_j	3	2	6	4	

(ছ) নিম্নলিখিত Profit matrix-এর আরোপ সমস্যাটি সমাধান করো ঃ ৫

	I	II	III	IV
A	7	5	4	3
B	8	2	6	4
C	5	3	2	1
D	5	4	1	8

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Answer ***all*** questions : 1×10

(a) The value of $\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ is

(i) 0 (ii) 1

(iii) a (iv) $\frac{a}{2}$

(b) If $\int_{0}^{\infty} e^{-kx}x^{n-1}dx = \lambda\Gamma(n)$, then the value of λ is

(i) k^{-n} (ii) k^{n-1}

(iii) $n!$ (iv) n^{-k}.

(c) Value of $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ is

(i) $\sqrt{\pi}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$

(iii) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (iv) π.

(d) The number 2.679556 rounded off to three places of decimal is

(i) 2.679 (ii) 2.680

(iii) 2.68 (iv) None of these.

(e) Value of $\Delta\left(\frac{1}{x+5}\right)$, taking $h=1$ is

(i) $\frac{1}{x+5}$ (ii) $\frac{1}{x+6}$

(iii) $\frac{1}{(x+5)(x+6)}$ (iv) $-\frac{1}{(x+5)(x+6)}$

(f) For a function $y = f(x)$ if $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,2,...,12$, then the degree of its interpolation polynomial is

(i) 10 (ii) 11

(iii) 12 (iv) None of these.

(g) If the vectors (1, 2, 4), (2, 2, 8), (1, k, 4) are linearly dependent, then the value of k is

(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) –1

(h) The maximum number of basic solutions to an LPP with m constraints and n variables, where $m<n$, is

(i) $n!$ (ii) ${}^nP_m$

(iii) ${}^nC_m$ (iv) $m!$.

(i) Which of the following is a Basic Feasible Solution of the system?

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

(i) (1, 2, 0) (ii) $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, 0\right)$

(iii) $\left(0, \frac{14}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ (iv) None of these.

(j) The optimal value of an Artificial Variable is

(i) positive (ii) negative

(iii) zero (iv) None of these.

Unit - 1

(Integral Calculus)

2. Answer ***any three*** questions :

(a) If $I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx; m,n$ are positive integers greater than 1, show that $I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$. 5

(b) Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \, dx = \pi$. 5

(c) Evaluate : $\int_3^4 \int_1^2 \frac{dydx}{(x+y)^2}$. 5

(d) Show that $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$. 5

(e) Find the perimeter of the curve represented by $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$. 5

Unit - 2

(Numerical Methods)

3. Answer ***any four*** questions :

(a) (i) Prove that $E\{\Delta f(x)\} = \Delta\{Ef(x)\}$.

(ii) If $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$, $h = 1$, find Δy. 3+2

(b) Find the missing data in the following table : 5

x	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	6	0	–	6	–	2

(c) Use Newton's forward interpolation formula to find the value of y when $x = 0.16$ from the following table : 5

x	0.1	0.2	0.3	0.4
y	1.005	1.020	1.045	1.081

(d) Use the method of bisection to compute a real root of $x^3 - 4x - 9 = 0$ between 2 and 3 up to four significant digits. 5

(e) Compute the real root of $x^3 - 8x - 4 = 0$, using Newton-Raphson method correct up to four decimal places. 5

(f) Use Lagrange's method to find a polynomial satisfying the given data : 5

x	–1	0	2	5
$f(x)$	9	5	3	15

(g) Use Simpson's one-third rule to evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, taking 4 subintervals, correct up to 4 decimal places. 5

Unit - 3

(Linear Programming)

4. Answer ***any four*** questions :

(a) Define Hyperplane. Show that a hyperplane in E^n is a convex set. 1+4

(b) Solve the following LPP by graphical method : 5

Minimize $Z = 20x_1 + 40x_2$

subject to $36x_1 + 6x_2 \geq 108,$

$3x_1 + 12x_2 \geq 36;$

$20x_1 + 10x_2 \geq 100;\ x_1, x_2 \geq 0.$

(c) Solve the following LPP by Simplex method : 5

Maximize $Z = 60x_1 + 50x_2$

subject to, $x_1 + 2x_2 \leq 40;$

$3x_1 + 2x_2 \leq 60;\ x_1, x_2 \geq 0.$

(d) Find all the basic solutions of the given set of equations :

$$2x + 3y - 5z = 5$$

$$4x + 2y + 4z = 6$$

Write down the basic and non-basic variables in each case. 4+1

(e) Find the dual of the following LPP : 5

Maximize $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$

subject to, $x_1 + 3x_2 + x_4 \geq 4$

$2x_1 + x_2 \leq 3$

$x_2 + 4x_3 + x_4 = 1;\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

(f) Solve the following transportation problem : 5

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	10	7	3	6	3
O_2	1	6	8	3	5
O_3	7	4	5	3	7
b_j	3	2	6	4	

(g) Solve the assignment problem with the following profit matrix :

	I	II	III	IV
A	7	5	4	3
B	8	2	6	4
C	5	3	2	1
D	5	4	1	8